Ueber
homocentrische Brechung unendlich dünner, cylindrischer Strahlenbündel in Rotationsflächen zweiter Ordnung.

Inaugural-Dissertation

behufs

Erlangung der Doctorwürde in der Philosophie

von der

philosophischen Facultät

der

Universität Rostock.

Vorgelegt von

Friedrich Detels

aus Schwerin i. M.

Schwerin 1887.

Druck der Sandmeyerschen Hofbuchdruckerei.

Referent: Herr Professor Dr. Matthiessen.

§ 1.

Präcisirung des Problems.

Durch die Untersuchungen von Sturm, Kummer, Zech[1]), Böklen[2]), Matthiessen u. A. über die Brechung unendlich dünner Strahlenbündel in krummen Flächen ist festgestellt worden, dass die Strahlen des Bündels nach der Brechung sämmtlich durch zwei sich kreuzende, unendlich kurze Linien gehen, welche in zwei auf einander senkrechten Ebenen — den Focalebenen — liegen. Auf dem Hauptstrahl des Bündels stehen diese beiden Brennlinien nach Sturm und Kummer senkrecht, während die übrigen der genannten Autoren die Ansicht vertreten, dass die Brennlinien im Allgemeinen schiefe Winkel mit dem Haupstrahl bilden.

Unter den beschränkenden Annahmen, dass 1) die brechende Fläche eine Rotationsfläche sei, dass 2) die Einfallsebene des dünnen Bündels eine Achsenebene dieser Fläche ist, sowie 3) dass die Strahlen des Bündels einander parallel sind, werden die Abstände jener Brennlinien vom Incidenzpunkte angegeben durch die Formeln:

$$\varphi_1 = \frac{n \,.\, \rho \,.\, \cos^2 e_1}{n \,.\, \cos e_1 - \cos e_2} \quad , \quad \varphi_2 = \frac{n \,.\, N}{n \,.\, \cos e_1 - \cos e_2} \quad ;$$ [3])

hierin bedeutet n den relativen Brechungsindex der beiden

---

1) Schlömilch, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 24 S. 168 (1879).

2) Borch, Journ. 96. Bd. S. 15 (1884).

3) Matthiessen, Differentialgleichungen der Dioptrik der geschichteten Krystalllinse. Pflügers Arch. f. d. ges. Physiol. XIX. S. 523 (1879).

durch die Fläche getrennten Medien, ρ den Krümmungsradius der Achsenschnittcurve im Incidenzpunkte, N die Normale desselben, e_1 und e_2 den Brechungs- resp. Einfallswinkel.

Diese Formeln lassen erkennen, dass die betrachteten Strahlenbündel unter einer gewissen Bedingung stigmatisch gebrochen werden können, wenn nämlich

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{oder} \quad N = \rho \,.\, \cos^2 e_1 \qquad (1)$$

ist. Mit der so definirten Art der homocentrischen Brechung soll sich die vorliegende Arbeit beschäftigen.

Dieses dioptrische Problem, welches an der unter Anm. 3 vor. Seite citirten Stelle angeführt und, soweit dort nötig, behandelt ist, wurde mir von Herrn Professor Matthiessen zu einer eingehenderen Bearbeitung übergeben, und ich erfülle eine angenehme Pflicht, indem ich diesem Herrn, meinem verehrten Lehrer, meinen ehrerbietigsten Dank sage für die Teilnahme und Förderung, welche er mir bei dieser Arbeit hat angedeihen lassen.

Die Gleichung (1) wird durch zwei reelle, vom Zeichen abgesehen gleiche Werte von e_1 befriedigt, wenn N und ρ gleiches Vorzeichen haben, und wenn $N < \rho$ ist. Homocentrische Brechung der cylindrischen Strahlenbündel kann demnach nur in convexen oder concaven Punkten von Rotationsflächen stattfinden, nicht in convex-concaven; überdies muss in diesen Punkten die Meridiancurve die schwächste Krümmung haben.

Zu den beiden gleichen Brechungswinkeln e_1, welche sich aus der Bedingungsgleichung (1) bestimmen, werden sich im Allgemeinen auch zwei reelle Einfallswinkel e_2 in bekannter Weise finden lassen, welche ihrerseits einander wieder gleich, aber mit verschiedenen Vorzeichen versehen sein müssen. Es fallen also in jedem Punkte der eben definirten Art zwei Strahlenbündel in die Fläche ein, symmetrisch zur Normale gelegen, welche homocentrische Brechung erleiden. Wir werden sie im Folgenden immer als Strahlenbündel der ersten und der

zweiten Art unterscheiden, indem wir unter der ersten Art alle diejenigen zusammenfassen, welche nach der Brechung auf der linken Seite der Normale liegen.

Die Brennweiten der beiden homocentrisch gebrochenen Bündel eines und desselben Punktes sind offenbar einander gleich; denn in dem Ausdruck für die Brennweite:

$$\varphi = \frac{n \,.\, \rho \,.\, \cos^2 e_1}{n \,.\, \cos e_1 - \cos e_2} \qquad (2)$$

wird nichts geändert, wenn man $-e_1$ und $-e_2$ für e_1 und e_2 einsetzt.

Nach diesen allgemeinen Auseinandersetzungen stellen wir das Problem:

> *„Es soll analytisch der Ort der Brennpunkte aller cylindrischen Strahlenbündel gesucht werden, welche von einer vorgelegten Rotationsfläche in der angegebenen Weise homocentrische Brechung erfahren.“*

Folgende vier Fälle sind zu unterscheiden:

1) das cylindrische Strahlenbündel fällt auf die convexe Seite der Fläche (N und ρ sind positiv), und tritt in ein dichteres Medium ($n > 1$);
2) das cylindrische Bündel fällt auf die concave Seite (N und ρ sind negativ), und tritt in ein dünneres Medium ($n < 1$);

in beiden Fällen convergiren die Strahlen des Bündels nach der Brechung, der Brennpunkt ist ein reeller und liegt im ersten Fall auf der concaven, im zweiten auf der convexen Seite der Fläche bezüglich des Incidenzpunkts;

3) das cylindrische Bündel fällt auf die convexe Seite der Fläche und tritt in ein dünneres Medium;
4) das cylindrische Bündel fällt auf die concave Seite und tritt in ein dichteres Medium;

in diesen beiden Fällen divergiren die Strahlen des Bündels nach der Brechung, und zwar von einem Punkte

auf der convexen Seite der Fläche im 3. Falle, von einem Punkte auf der concaven Seite der Fläche im Falle 4; der Brennpunkt ist virtuell.

§ 2.

Allgemeine Lösung.

Der gesuchte geometrische Ort wird eine zweischalige Fläche sein, denn jedem Punkte der brechenden Fläche entsprechen zwei verschiedene Punkte des Brenngebildes. Da ferner die brechende Fläche eine Rotationsfläche ist, und da die von uns betrachtete Strahlenbrechung immer in einer Achsenebene derselben vor sich geht, so wird das Brenngebilde auch eine Rotationsfläche sein, und wir können unsere Darstellungen auf die Ebene eines Achsenschnitts beschränken. In dieser Ebene kennen wir die Gleichung der Achsenschnittcurve der brechenden Fläche:

$$f(x, y) = 0 \qquad (3)$$

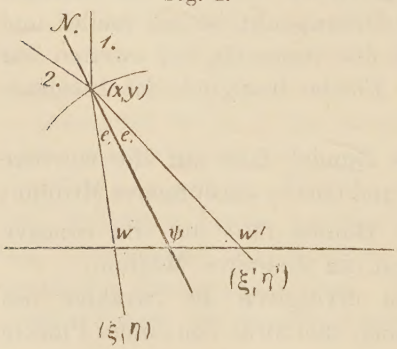
weiter die Abstände der Punkte (ξ, η) und (ξ^1, η^1) des Brenngebildes vom zugehörigen Punkte (x, y) der Curve (3):

$$\sqrt{(\xi^2 - x^2) + (\eta^2 - y^2)} = \varphi = \frac{n \,.\, \rho \,.\, \cos^2 e_1}{n \,.\, \cos e_1 - \cos e_2} \qquad (4)$$

$$\sqrt{(\xi^{1^2} - x^2) + (\eta^{1^2} - y^2)} = \varphi = \frac{n \,.\, \rho \,.\, \cos^2 e_1}{n \,.\, \cos e_1 - \cos e_2} \qquad (4^1)$$

endlich die Richtungen der Verbindungslinien der Punkte (ξ, η) mit (x, y) und (ξ^1, η^1) mit (x, y). Bezeichnen nämlich w und w^1 resp. die Winkel dieser Verbindungslinien mit der Achse, ψ den Winkel zwischen der Normale und der Achse, so ist einerseits, wie man aus der Fig. 1 entnimmt:

Fig. 1.



$$\text{tang } w = \frac{\eta - y}{\xi - x} \quad , \quad \text{tang } w^1 = \frac{\eta^1 - y}{\xi^1 - x}$$

andrerseits:

$$w = \psi - e_1 \quad , \quad w^1 = \psi + e_1$$

so dass noch die Gleichungen bestehen:

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{\text{tang } \psi - \text{tang } e_1}{1 + \text{tang } \psi \,.\, \text{tang } e_1} \tag{5}$$

$$\frac{\eta^1 - y}{\xi^1 - x} = \frac{\text{tang } \psi + \text{tang } e_1}{1 - \text{tang } \psi \,.\, \text{tang } e_1} \tag{5^1}$$

Die Grössen ρ, e_1, e_2 und ψ lassen sich alle in bekannter Weise durch x und y und deren Differentiale ausdrücken. Nachdem dies geschehen, hat man sowohl aus den Gleichungen (3), (4), (5) als auch aus (3), (4^1) und (5^1) die Grössen x und y zu eliminiren und erhält zwei Gleichungen in ξ und η, resp. in ξ^1 und η^1, welche den gesuchten geometrischen Ort darstellen.

Die wirkliche Durchführung dieses Eliminationsproblems hat grosse Schwierigkeiten, schon wenn f(x, y) nur vom zweiten Grade ist; wir streben die Lösung unserer Aufgabe deshalb auf anderem Wege an.

§ 3.

Specialisirung.

Es wird eine gewisse Eigenschaft der brechenden Fläche vorausgesetzt, nämlich die: *dass sie die Hauptstrahlen der homocentrisch gebrochenen Bündel erster Art nach der Brechung alle durch einen und denselben Punkt sendet*, über dessen Lage wir aber nichts festsetzen. Wir wollen diesen Convergenzpunkt der Hauptstrahlen als Pol eines Polarcoordinatensystems ansehen, auf welches bezogen $r = f(\vartheta)$ die Gleichung der Achsenschnittcurve der brechenden Fläche sein möge. Dann behaupten wir:

„Die algebraische Differenz r — φ giebt die Lösung des gestellten Problems für die Strahlenbündel der ersten Art.“

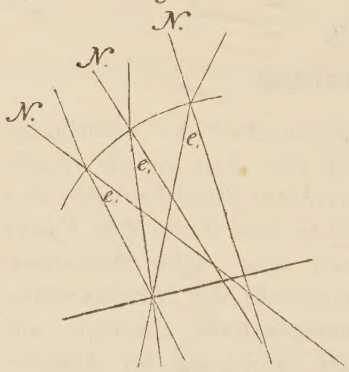
Mit andern Worten: $r - \varphi$ ist der Radius vector der Brenncurve für die Strahlenbündel erster Art, bezogen auf das eben vorher definirte Polarcoordinatensystem.

In der That fällt, nach der Eigenschaft der brechenden Fläche, der gebrochene Hauptstrahl jedes Strahlenbündels erster Art mit dem Radius vector des Incidenzpunkts zusammen in dieselbe gerade Linie; auf dem Hauptstrahl aber wird die Brennweite φ gemessen und hat, wenn sie mit positivem Zeichen behaftet ist, die entgegengesetzte Richtung wie der Radius vector r.

Um die Brenncurve der Strahlenbündel zweiter Art zu finden, müsste man, wie es vorläufig scheint, eine andere Methode benutzen; doch wird sich zeigen, dass auch für sie schon die Methode durch unsere Annahme vorgezeichnet ist.

Die nächste Aufgabe ist nun, zu untersuchen, ob es Flächen mit der vorausgesetzten Eigenschaft giebt, welche es sind, und wo der Convergenzpunkt liegt.

Figur 2.



In Bezug auf den noch unbestimmten Convergenzpunkt und eine beliebige, durch ihn gehende Achse möge $f(r, \vartheta) = 0$ die Gleichung der Achsenschnittcurve einer der vorausgesetzten Flächen sein. Wir haben die Function $f(r, \vartheta)$ zu bestimmen aus der Eigenschaft der verlangten Curve, dass der Winkel e_1, welcher sich für einen willkürlichen Curvenpunkt aus der Gleichung $N = \rho \cdot \cos^2 e_1$

ergiebt, gerade der Winkel zwischen der Normale und dem Radius vector ist; (denn der gebrochene Hauptstrahl soll mit dem Radius vector zusammenfallen.) In jedem Curvenpunkt muss mithin zwischen Krümmungsradius, Normale und dem Winkel zwischen ihnen und dem Radius vector die Relation bestehen:

$$N = \rho \,.\, \cos^2 e_1$$

N, ρ und $\cos e_1$ lassen sich durch r, ϑ und ihre Differentiale ausdrücken; es ist bekanntlich:

$$\text{tang } e_1 = \frac{dr}{r \,.\, d\vartheta}$$

mithin:

$$\cos e_1 = \frac{r \,.\, d\vartheta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}} \quad , \quad \sin e_1 = \frac{dr}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}}$$

weiter:

$$\rho = \frac{(dr^2 + r^2 d\vartheta^2)^{\frac{3}{2}}}{2dr^2 d\vartheta - r d^2 r d\vartheta + r^2 d\vartheta^3}$$

endlich:

$$N = \frac{r \,.\, \sin\vartheta}{\sin(\vartheta - e_1)} = \frac{r \,.\, \sin\vartheta \,.\, \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}}{r \,.\, \sin\vartheta \,.\, d\vartheta - \cos\vartheta \,.\, dr}$$

Wir setzen diese Ausdrücke ein, bilden auf beiden Seiten die reciproken Werte und erweitern mit $\frac{r}{d\vartheta}$, so ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{d^2 r}{d\vartheta^2} - \frac{2}{r} \cdot \frac{dr^2}{d\vartheta^2} - \text{cotang } \vartheta \,.\, \frac{dr}{d\vartheta} = 0 \qquad (6)$$

Dieser Differentialgleichung hat die Achsenschnittcurve der brechenden Fläche zu genügen, wenn diese die verlangte Eigenschaft besitzen soll; die Integration derselben führt zur Kenntniss der Gesammtheit dieser Flächen.

Gleichung (6) lässt sich in die Form bringen:

$$\frac{d\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)}{\frac{dr}{d\vartheta}} - 2 \,.\, \frac{dr}{r} - \text{cotang } \vartheta \,.\, d\vartheta = 0.$$

und die Integration ergiebt, wenn log A eine willkürliche Constante ist:

$$\log \frac{dr}{d\vartheta} - 2 \log r - \log \sin \vartheta - \log A = 0.$$

oder:

$$\frac{dr}{r^2} = A \,.\, \sin \vartheta \,.\, d\vartheta;$$

durch abermalige Integration entsteht dann:

$$\frac{1}{r} = A \,.\, \cos \vartheta + B$$

oder:

$$r = \frac{\frac{1}{B}}{1 + \frac{A}{B} \cos \vartheta} \qquad (7)$$

worin B ebenfalls eine willkürliche Constante ist.

Die Finalgleichung (7) ist nun die der drei Kegelschnitte Ellipse, Parabel, Hyperbel, je nach dem Werte des Verhältnisses $\frac{A}{B}$. Der Pol, auf den sie bezogen ist — also der Convergenzpunkt der Hauptstrahlen — ist der I. Brennpunkt (links von der Normale), die Achse des Polarcoordinatensystems ist die grosse Achse der Kegelschnitte. Es ist mithin die Form der Achsenschnittcurven von Flächen mit der vorausgesetzten Eigenschaft gefunden und gleichzeitig die Lage des Convergenzpunkts völlig bestimmt.

Wir fassen nunmehr den ersten der auf Seite 5 unterschiedenen Fälle ins Auge und übertragen die Resultate der letzten Betrachtung auf den Raum in folgenden Sätzen:

a) *Die einzigen Flächen, welche die cylindrischen Strahlenbündel in der vorgeschriebenen Weise brechen, sind die Rotationsflächen zweiter Ordnung: oblonges Ellipsoid, Paraboloid, zweischaliges Hyperboloid (von welchem aber zunächst nur die rechte Schale in Betracht kommen soll).*

b) Diese Flächen zwingen die Hauptstrahlen der Strahlenbündel erster Art zur Convergenz durch ihren I Brennpunkt[1]*) nach der Brechung.*

Die geometrischen Eigenschaften dieser Flächen rechtfertigen den Schluss, dass für die Hauptstrahlen der Bündel zweiter Art ein ähnliches Brechungsgesetz gilt, in welchem der zweite Brennpunkt eine Rolle spielt. Dies Gesetz ist das folgende:

c) Ist die brechende Fläche ein Ellipsoid, so convergiren die Hauptstrahlen der Strahlenbündel zweiter Art nach der Brechung gegen den II. Brennpunkt.

d) Ist die brechende Fläche ein Paraboloid, so sind die Hauptstrahlen der Strahlenbündel zweiter Art unter sich und der Achse des Paraboloids parallel.

e) Ist die brechende Fläche die rechte Schale eines Hyperboloids, so divergiren die Hauptstrahlen der Bündel zweiter Art vom II. Brennpunkte her. — Für die linke Schale des Hyperboloids kehren sich die Verhältnisse insofern um, als die Hauptstrahlen der Bündel zweiter Art gegen den II. Brennpunkt convergiren, während die der Bündel erster Art vom I. Brennpunkt her divergiren.

Beweise hierfür folgen unmittelbar daraus, dass die Normale dieser Flächen den Winkel zwischen den Radien vectoren, resp. dessen Nebenwinkel, halbirt.

§ 4.

Die Brennfläche für das Rotationsellipsoid.

Wir gehen in die Ebene der Meridiancurve zurück und stellen die Gleichung des einen Zweiges der Brenncurve, den Ort der Brennpunkte der Strahlenbündel erster Art, in der Weise dar, welche auf Seite 8 gezeigt ist.

---

[1]) Herr Prof. Matthiessen benutzt diesen Satz am schon citirten Orte S. 522, um die Zweckmässigkeit der ellipsoidischen Gestalt der Hornhaut für das periscopische Sehen zu erweisen.

Die Gleichung der Ellipse, bezogen auf ihren I. Brennpunkt und die grosse Achse, sei:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \,.\, \cos \vartheta} \quad ; \quad (8)$$

darin bedeutet p die Ordinate im Brennpunkt, ε die numerische Excentricität, welche kleiner als 1 sein muss. Beide Grössen hängen mit den Halbachsen der Ellipse a und b zusammen durch die Relationen:

$$p = \frac{b^2}{a} \quad , \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Die Aenderung von ϑ ist positiv, wenn der Sinn der Drehung des Radius vector mit dem des Uhrzeigers übereinstimmt, die Nulllage wird angegeben durch die Strecke IS in den Figuren.

Um die Differenz $r - \varphi$ bilden zu können, haben wir die Brennweite φ durch die Grössen r und ϑ darzustellen. Nun ist:

$$\operatorname{tang} e_1 = \frac{dr}{r \,.\, d\vartheta} = \frac{\varepsilon \,.\, \sin \vartheta}{1 + \varepsilon \,.\, \cos \vartheta}$$

mithin:

$$\sin e_1 = \frac{\varepsilon \,.\, \sin \vartheta}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \vartheta}} \,, \quad \cos e_1 = \frac{1 + \varepsilon \,.\, \cos \vartheta}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \,.\, \cos \vartheta}};$$

da weiter $\cos e_2 = \sqrt{1 - n^2 \sin^2 e_1}$, so erhalten wir:

$$\cos e_2 = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon^2 - n^2 \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \vartheta + n^2 \varepsilon^2 \cos^2 \vartheta}{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \vartheta}} \quad (9)$$

Es ist zu beachten, dass den Grössen $\cos e_1$ wie $\cos e_2$ das positive Zeichen zu geben ist, so lange e_1 und e_2 mit wachsendem ϑ sich ebenfalls im Sinne des Uhrzeigers ändern; sie erhalten aber das negative Zeichen, sobald sie anfangen sich im entgegengesetzten Sinne zu ändern. Wann dies geschieht, wird eine spätere Untersuchung ergeben. — Schliesslich ist der Krümmungsradius der Ellipse:

$$\rho = p \cdot \frac{(1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cdot \cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \varepsilon \cdot \cos\vartheta)^3}$$

und durch Einsetzen in die Formel (2) ergiebt sich nach einigen Operationen:

$$\varphi = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos\vartheta} \left\{ \frac{n^2 + n^2 \varepsilon \cos\vartheta}{n^2 - 1} - \frac{n \cdot \sqrt{1 + \varepsilon^2 - n^2 \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos\vartheta + n^2 \varepsilon^2 \cos^2\vartheta}}{n^2 - 1} \right\} \tag{10}$$

Setzen wir der Kürze halber

$$\sqrt{1 + \varepsilon^2 - n^2 \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos\vartheta + n^2 \varepsilon^2 \cos^2\vartheta} = \sqrt{R(\cos\vartheta)}$$

und bezeichnen den Radius vector der Brennecurve $r - \varphi$ mit r_1, so wird die Gleichung der Brenncurve lauten:

$$r_1 = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos\vartheta} \left\{ 1 - \frac{n^2 + n^2 \varepsilon \cos\vartheta + n \sqrt{R(\cos\vartheta)}}{n^2 - 1} \right\} \tag{11}$$

und weil der Factor vor der Klammer stets positiv ist, können wir ihr endlich die Form geben:

$$r_1 = \frac{-p}{(n^2 - 1)(1 + \varepsilon \cdot \cos\vartheta)} \times \left\{ 1 + n^2 \varepsilon \cos\vartheta + n \sqrt{R(\cos\vartheta)} \right\} \tag{11^1}$$

Der Entwicklung gemäss ist diese Gleichung bezogen auf den I. Brennpunkt und die grosse Achse der Ellipse. Ueber das Vorzeichen der Quadratwurzel in ihr muss dasselbe gelten, was auf Seite 12 im Anschluss an Formel (9) gesagt ist. Der Umstand, dass r_1 negativ ist, zeigt, dass der Incidenzpunkt und der Brennpunkt des Strahlenbündels vom Brennpunkt der Ellipse aus in entgegengesetzter Richtung liegen.

Um zur Gleichung des zweiten Zweiges der Brenncurve zu gelangen — welcher zu den Strahlenbündeln der zweiten Art gehört — können wir auf Grund des Satzes (c) (Seite 11) genau verfahren wie soeben, wenn

wir nur alle Gleichungen auf den II. Brennpunkt der Ellipse beziehen. Die Gleichung der Ellipse hat dann die Form:

$$r^1 = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos \vartheta^1},$$

worin über die Veränderlichkeit von ϑ^1 dasselbe gilt, was von ϑ festgesetzt war. Die Gleichung des zweiten Zweiges wird sich von (11) mithin dadurch unterscheiden, dass die mit dem Factor $\cos \vartheta^1$ behafteten Glieder das negative Zeichen erhalten, sowie dass das Vorzeichen der Quadratwurzel sich umkehrt; sie wird lauten:

$$r_1^1 = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos \vartheta^1} \left\{ 1 - \frac{n^2 - n^2 \varepsilon \cos \vartheta^1 - n \sqrt{R (\cos \vartheta^1)}}{n^2 - 1} \right\} \quad (12)$$

oder auch hier wieder einfacher:

$$r_1^1 = \frac{-p}{(n^2 - 1)(1 - \varepsilon \cdot \cos \vartheta^1)} \times \left\{ 1 - n^2 \varepsilon \cos \vartheta^1 - n \sqrt{R (\cos \vartheta^1)} \right\} \quad (12^1)$$

weil der Factor vor der Klammer in (12) stets positiv ist. Die Gleichung ist, wie gesagt, auf den II. Brennpunkt der Ellipse bezogen.

Wie sich die durch (11) und (12) dargestellten Curven geometrisch gegen einander verhalten, zeigt eine einfache Betrachtung. Aus der Symmetrie der Ellipse in Bezug auf ihre beiden Achsen folgern wir:

f) Die 8 Brennweiten der 4 Strahlenbündel erster und der 4 Strahlenbündel zweiter Art, welche in 4 symmetrisch zu beiden Achsen gelegenen Punkten der Ellipse einfallen, sind untereinander gleich; die Winkel, unter denen die gebrochenen Hauptstrahlen die Achsen schneiden, sind symmetrisch.

Wenn dies aber der Fall ist, so gilt auch der Satz:

g) Die grosse Achse der Ellipse ist Symmetrieachse für die beiden Hälften, in welche sie jeden Zweig der

Brennlinie zerlegt; die kleine Achse ist Symmetrielinie für die beiden Zweige der Brenncurve gegen einander.

Die beiden Sätze (f) und (g) erlauben die vollständige Construction der Brenncurve, wenn das Stück eines ihrer Zweige bekannt ist, welches einem Ellipsenquadranten entspricht; wenn man also etwa den Ort der Brennpunkte aller Strahlenbündel erster Art kennt, welche im ersten Ellipsenquadranten auffallen. Hiervon werden wir später Anwendung machen, nachdem wir auf einige allgemeine Eigenschaften der Gleichung (11^1) eingegangen sind.

§ 5.

Discussion der Gleichung.

In Gleichung (11^1) ist r_1 als irrationale Function von $\cos\vartheta$ ausgedrückt, es ist demnach möglich, dass r_1 für irgend welche Werte von ϑ imaginär wird; dies tritt ein, falls die Function $R(\cos\vartheta)$ unter dem Wurzelzeichen nicht für alle Grössen ϑ zwischen 0 und 2π positiv ist. Um sie hierauf hin zu untersuchen, setzen wir $\cos\vartheta = x$ und lassen x der Reihe nach die Werte -1, $-\varepsilon$, 0, $+\varepsilon$, $+1$ annehmen; wir finden dann:

$R(-1) = 1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon = (1-\varepsilon)^2$ oder sicher positiv,

$R(-\varepsilon) = (1-\varepsilon^2)(1-n^2\varepsilon^2)$, d. h. $\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} 0$, je nachdem $n \begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix} \frac{1}{\varepsilon}$;

$R(0) = 1 + \varepsilon^2 - n^2\varepsilon^2$, d. h. $\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} 0$, wenn $n \begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix} \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon}$ ist;

$R(+\varepsilon) = 1 + 3\varepsilon^2 - n^2\varepsilon^2(1-\varepsilon^2) > 0$;

$R(+1) = (1+\varepsilon)^2 > 0$.

Es zeigt sich also: wenn $n \begin{matrix}<\\=\end{matrix} \frac{1}{\varepsilon}$ ist, so wird der Radius

vector r_1 niemals imaginär, es entspricht jedem Punkt der Ellipse ein Punkt der Brennecurve. Wenn aber $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ist, so wird r_1 imaginär für alle Werte von x (oder $\cos\vartheta$), welche zwischen den beiden Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ liegen, und von diesen Wurzeln ist eine kleiner, die andere grösser als $-\varepsilon$. Nun wissen wir, dass für den oberen und unteren Scheitel der Ellipse $x = \cos\vartheta = -\varepsilon$ ist, sehen also, wenn wir die Symmetriegesetze (f) und (g) mit berücksichtigen, dass einer continuirlichen Reihe von Punkten der Ellipse, symmetrisch zu beiden Seiten des oberen und unteren Scheitels gelegen, keine Punkte der Brennecurve (11^1) entsprechen können.

Die geometrische Ursache hierfür wird klar, wenn wir beachten, dass der betrachtete Ausdruck $\sqrt{R(x)}$ der Zähler ist vom Cosinus des Einfallswinkels e_2 (vgl. Formel 9). Für $n < \frac{1}{\varepsilon}$ zeigt sich, dass der Einfallswinkel e_2 der Strahlenbündel erster Art von 0^0 ab im Sinne des Uhrzeigers zunimmt, wenn sich der Incidenzpunkt vom linken Scheitel aus über den ersten Ellipsenquadranten nach dem oberen Scheitel bewegt; in letzterem erreicht e_2 sein Maximum, welches kleiner als 90^0 ist. Während sich der Incidenzpunkt über den zweiten Ellipsenquadranten weiter bewegt, nimmt e_2 wieder bis 0^0 ab, fällt im dritten Quadranten noch weiter bis zu seinem Minimum — welches dem Maximum absolut genommen gleich ist — um dann durch den vierten Quadranten der Ellipse wieder bis 0^0 zu wachsen.

Für $n = \frac{1}{\varepsilon}$ gilt genau dasselbe, nur das Maximum resp. Minimum von e_2 hat den Wert 90^0.

Sobald nun $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ist, tritt insofern eine Aenderung ein, als Maximum und Minimum von e_2 imaginär werden;

denn der Einfallswinkel e_2 kann nicht grösser als 90^0 werden, erreicht diese Grösse indessen schon für einen Incidenzpunkt im ersten Quadranten der Ellipse; für den Ellipsenbogen von diesem Punkte an bis zum oberen Scheitel sind demnach keine Strahlenbündel mehr vorhanden, welche homocentrisch gebrochen werden könnten, und ebenso ist es mit den symmetrisch gelegenen Ellipsenstücken in den übrigen drei Quadranten.

Ganz allgemein erfolgt nach dem Gesagten die Aenderung des Winkels e_2 im ersten und vierten Ellipsenquadranten gleichsinnig mit der Aenderung von ϑ, im zweiten und dritten Quadranten aber im entgegengesetzten Sinne, so dass in Gleichung (11^1) der früher schon angedeutete Zeichenwechsel vor der Quadratwurzel vorzunehmen ist, wenn $\cos\vartheta$ in das Gebiet der Grössen zwischen $-\varepsilon$ und -1 übergeht.

Unterwirft man die Strahlenbündel zweiter Art einer analogen Betrachtung, so stellt sich heraus, dass in Gleichung (12^1) der Zeichenwechsel für die Werte von $\cos\vartheta$ einzutreten hat, welche zwischen $+\varepsilon$ und -1 liegen; denn der Radius vector vom II. Brennpunkt nach dem oberen Scheitel der Ellipse bildet mit der Achse einen Winkel, dessen Cosinus gleich $+\varepsilon$ ist. —

Um die Maxima und Minima der Brenncurve festzustellen, differentiiren wir Gleichung (11^1) nach ϑ und finden:

$$\frac{dr_1}{d\vartheta} = -r_1 . \varepsilon . \sin\vartheta . \left\{ \frac{1}{1 + \varepsilon . \cos\vartheta} - \frac{n}{\sqrt{R(\cos\vartheta)}} \right\} \quad (13)$$

Zunächst wird $\frac{dr_1}{d\vartheta} = 0$ für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$; r_1 erreicht ein Maximum, wenn $\vartheta = 0$, ein Minimum, wenn $\vartheta = \pi$ ist, also in den Punkten, wo die Brenncurve die grosse Achse der Ellipse schneidet.

Weitere Maxima oder Minima existiren nicht. Gäbe es nämlich noch weitere, so müsste für sie der Ausdruck in der Klammer von (13) verschwinden, es müsste sein:

$$1 + \varepsilon \,.\, \cos\vartheta = \frac{1}{n} \,.\, \sqrt{R\,(\cos\vartheta)};$$

quadrirt man aber und führt für R (cos ϑ) seinen Wert ein, so entsteht:

$$(n^2 - 1)\ \ (1 + \varepsilon^2 + 2\,\varepsilon \,.\, \cos\vartheta) = 0$$

und diese Gleichung ist, da $n^2 - 1$ nicht Null, durch einen reellen Wert von ϑ nicht erfüllbar.

Der Radius vector $r_1{}^1$ (Gleichung (12^1)) wird nun ein Minimum erreichen für $\vartheta = 0$, und ein Maximum für $\vartheta = \pi$, weil die Curve (11^1) der Curve (12^1) symmetrisch ist in Bezug auf die kleine Achse der Ellipse. Da überdies im linken und rechten Scheitel der Ellipse das Strahlenbündel erster Art mit dem Strahlenbündel zweiter Art zusammenfällt (es ist $e_2 = 0$ für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$), so müssen die beiden Zweige (11^1) und (12^1) der Brenncurve auf der grossen Achse zwei gemeinsame Punkte besitzen; in diesen beiden Punkten berühren sich die Zweige, denn schneiden können sie sich nicht, weil die beiden Hälften eines jeden symmetrisch sein sollen zur grossen Achse. — Wenn die b-Achse der Ellipse überhaupt von dem Brenngebilde getroffen wird, so geschieht dies der Symmetrie halber ebenfalls in zwei gemeinsamen Punkten, in denen sich allerdings die Zweige dann schneiden.

Wir zeigen schliesslich noch, dass die Brennpunkte der Ellipse im Allgemeinen nicht Punkte der Brenncurve sind. Wäre dies nämlich der Fall, so müsste für einen oder mehrere Werte von ϑ r_1 verschwinden, also der Ausdruck in der Klammer von Gleichung (11^1) Null werden:

$$1 + n^2\,\varepsilon \cos\vartheta = -\,n\,\sqrt{R\,(\cos\vartheta)}$$

Wenn man quadrirt, so fallen alle Glieder fort, welche cos ϑ enthalten und es bleibt als Bedingung für das Verschwinden von r_1:

$$n = \frac{1}{\varepsilon}$$

Nur in dem Specialfall $n = \frac{1}{\varepsilon}$ liegt hiernach der I. Brennpunkt auf der Brenncurve; — für den II. Brennpunkt gilt natürlich dasselbe; — er ist dann aber ein singulärer Punkt, denn es wird $r_1 = 0$ ganz unabhängig von ϑ. Weiter unten werden wir dies noch ausführlicher behandeln.

§ 6.

Numerische Berechnung und graphische Darstellung.

Die graphische Darstellung des Brenngebildes gelingt, wie schon hervorgehoben, wenn das Stück eines Zweiges bekannt ist, welches zu irgend einem Ellipsenquadranten gehört. Wir berechnen aus Gleichung (11^1) r_1 für den ersten Ellipsenquadranten, indem wir ϑ von 10^0 zu 10^0 wachsen lassen. Als Beispiel für den Fall $n < \frac{1}{\varepsilon}$ wird der Meridianschnitt eines Ellipsoids von der Gestalt und dem Brechungsvermögen der Hornhaut des menschlichen Auges benutzt, dessen Constanten

$$a = 11{,}009 \qquad b = 9{,}272 \qquad n = 1{,}338$$

aus Herrn Prof. Matthiessens „Differentialgleichungen der Dioptrik der geschichteten Krystalllinse“ (Seite 524) entnommen sind. Danach ist zu setzen:

$$p = \frac{b^2}{a} = 7{,}8090 \qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = 0{,}5391$$

und Gleichung (11^1) wird:

$$-r_1 = \frac{7{,}809}{(1{,}338^2 - 1)(1 + 0{,}5391 \cos\vartheta)} \left\{ 1 + 0{,}9650 \cos\vartheta + \right.$$

$$\left. + 1{,}338 \cdot \sqrt{0{,}7705 + 1{,}0782 \cos\vartheta + 0{,}5202 \cos^2\vartheta} \right\}$$

Es ist bequem, den Einfallswinkel e_2 aus Formel (9) auch mit zu berechnen; man gelangt zu den folgenden Resultaten:

Tabelle I.

ϑ	e_2	$-r_1$	ϑ	e_2	$-r_1$
0°	0°	**25,84**	70°	31° 45′	23,34
10°	5° 55′	25,80	**80°**	35° 43′	**22,48**
20°	9° 17′,5	**25,66**	**90°**	40° 58′	**21,50**
30°	15°	25,42	**100°**	42° 33′	**20,37**
40°	18° 35′	**25,08**	**110°**	44° 54′	**19,15**
50°	23° 6′	24,62	**122° 47′**	46° 10′	**18,56**
60°	27° 30′	**24,05**			

Construction der Brenncurve (Tafel, Fig. 1.):

Es ist durch den I. Brennpunkt der Ellipse ein Büschel von Geraden gelegt, welche mit der grossen Achse die Winkel 0°, 20°, 40°, 60°, 80°, 90°, 100°, 110°, 122° 47′ bilden; diese Geraden sind die Hauptstrahlen von Bündeln erster Art, welche in den Punkten P_0 P_1 . . . . P_8 der Ellipse homocentrisch gebrochen werden. Man trägt auf ihnen die in der Tabelle angegebenen Werte von r_1 vom Brennpunkte I aus ab und erhält so die Punkte Π_0 Π_1 . . . . Π_8 des ersten Zweiges der Brenncurve. Dann zieht man von den Punkten P_0 P_1 . . . P_8 Gerade durch den II. Brennpunkt — sie sind die Hauptstrahlen der in denselben Incidenzpunkten gebrochenen Bündel zweiter Art — und benutzt zur Auffindung der Punkte Π_0^1 Π_1^1 . . . . . Π_8^1 den Satz, dass die Bündel erster und zweiter Art in denselben Incidenzpunkte gleiche Brennweite haben; man trägt also auf diesen Strahlen die Strecken P_0 Π_0, P_1 Π_1, P_2 Π_2, . . . P_8 Π_8 von den Incidenzpunkten P_0 P_1 P_2 . . . . . P_8 aus ab und kommt dadurch zu den Punkten Π_0^1 Π_1^1 . . . . . Π_8^1 des zweiten Brenncurvenzweiges. Nach dem Symmetriegesetz unter (g) ist weiter die Fortsetzung der Curve Π_0 Π_1 Π_2 . . . . Π_8 nach links hin symmetrisch dem Curvenstück Π_0^1 Π_1^1 Π_2^1 . . . . Π_8^1 in Bezug auf die kleine Achse der Ellipse, und ebenso

umgekehrt auch die Fortsetzung der Curve $H_0^1 H_1^1 \ldots H_8^1$ symmetrisch dem Stücke $H_0 H_1 \ldots H_8$. Hat man so die Hälften beider Zweige construirt, welche unterhalb der grossen Achse der Ellipse liegen, so ist die Construction der oberen Hälften mit Hülfe des Symmetriegesetzes (g) ebenfalls leicht auszuführen. —

Der Fall $n > \frac{1}{\varepsilon}$ soll zunächst durch das willkürliche Beispiel:

$$p = 7,\ \varepsilon = 0{,}8,\ n = 1{,}6$$

illustrirt werden; dann ist:

$$-r_1 = \frac{7}{1{,}56\,(1 + 0{,}8\cos\vartheta)} \left\{ 1 + 2{,}048\cos\vartheta + \right.$$

$$\left. + 1{,}6\sqrt{0{,}0016 + 1{,}6\cos\vartheta + 1{,}6384\cos^2\vartheta} \right\}$$

In der Tabelle I zeigt sich, dass r_1 zu Anfang sehr langsam abnimmt; wir machen daher hier die Tabelle nicht mehr so umfangreich, da wir bemerken, dass auch hier r_1 für 60° nicht viel kleiner ist als für 0°. Wachsen kann r_1 ja nicht zwischen beiden Winkelwerten, wie allgemein bewiesen ist.

Tabelle II.

ϑ	e_2	$-r_1$
0°	0°	14,94
60°	45° 15′	12,19
70° 31′,7	54° 57′	10,76
82° 47′	69° 28′,7	7,28
90°	88° 36′	4,77
90° 23′	90°	4,48

Die Construction der Brenncurve ist in Fig. 5 der Tafel in der vorhin beschriebenen Weise ausgeführt. —

Von besonderem Interesse ist der Specialfall $n = \frac{1}{\varepsilon}$.

Unter dieser Voraussetzung vereinfacht sich Gleichung (11^1) zu

$$r_1 = \frac{-2p(1 + n \cdot \cos\vartheta)}{(n^2 - 1)(1 + \varepsilon \cdot \cos\vartheta)} \qquad (14)$$

solange $1 \geqq \cos\vartheta > -\varepsilon$ ist; für alle Werte aber von $\cos\vartheta$ zwischen $-\varepsilon$ und -1 wird, weil die Quadratwurzel das negative Zeichen erhält:

$$\underline{\underline{r_1 = 0}}$$

Aus Gleichung (12^1) wird unter derselben Voraussetzung:

$$r_1^1 = \frac{-2p(1 - n \cdot \cos\vartheta)}{(n^2 - 1)(1 - \varepsilon \cdot \cos\vartheta)} \qquad (15)$$

solange $-1 \leqq \cos\vartheta < +\varepsilon$, und ebenfalls

$$\underline{\underline{r_1^1 = 0}}$$

für die Werte von $\cos\vartheta$ zwischen $+\varepsilon$ und $+1$.

Die geometrische Bedeutung dieser Resultate ist die folgende:

Der I. Brennpunkt der Ellipse ist der Ort der Brennpunkte aller Strahlenbündel erster Art, welche im zweiten und dritten Quadranten der Ellipse einfallen; der II. Brennpunkt der Ellipse ist der Ort der Brennpunkte aller Strahlenbündel zweiter Art, welche im ersten und vierten Ellipsenquadranten einfallen. Die Gleichungen (14) und (15) stellen die Oerter der Brennpunkte der übrigen Bündel erster und zweiter Art dar, welche nämlich im ersten und vierten, beziehungsweise im zweiten und dritten Ellipsenquadranten auffallen.

Die Gleichungen (14) und (15) können wir construiren, ohne eine Tabelle zu berechnen. Betrachten wir nämlich ein Strahlenbündel erster Art, welches im ersten (oder vierten) Quadranten eintritt; sein Hauptstrahl geht, wie wir wissen, nach der Brechung durch den I. Brennpunkt; es wird nun behauptet,

> *„dass die Brennweite dieses Strahlenbündels gleich dem Radius vector der Ellipse ist, welcher vom II. Brennpunkte nach dem Incidenzpunkte führt.“*

Die Richtigkeit folgt schon daraus, dass das Bündel zweiter Art in demselben Incidenzpunkt seinen Brennpunkt im II. Brennpunkt der Ellipse hat; doch lässt sie sich auch leicht direct beweisen.

[Ist nämlich r der Abstand des Incidenzpunkts vom I. Brennpunkt, so ist bekanntlich $2a - r$ sein Abstand vom II. Brennpunkte. Nach Gleichung (10) wird für $n = \frac{1}{\varepsilon}$ die Brennweite:

$$\varphi = r \cdot \frac{1 + \varepsilon^2 + 2\,\varepsilon \cos \vartheta}{1 - \varepsilon^2};$$

es müsste gezeigt werden, dass:

$$r \cdot \frac{1 + \varepsilon^2 + 2\,\varepsilon \cos \vartheta}{1 - \varepsilon^2} = 2a - r;$$

schafft man den Nenner fort, so entsteht:

$$r(1 + \varepsilon \cdot \cos \vartheta) = a(1 - \varepsilon^2)$$

Es ist aber

$$a(1 - \varepsilon^2) = a\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a} = p,$$

mithin führt die vorausgesetzte Gleichung auf die wirklich bestehende:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos \vartheta}$$

und muss richtig sein.]

Die Constructionsmethode ist hiernach klar; man hat auf allen Geraden, welche von den Punkten des ersten und vierten Ellipsenquadranten durch den I. Brennpunkt gelegt sind, die Radien vectoren jener Incidenzpunkte in Bezug auf den II. Brennpunkt abzutragen, um Punkte der Curve (14) zu erhalten. Der letzteren ist die Curve (15) wieder völlig symmetrisch in Bezug auf die kleine Achse der Ellipse. Fig. 3 auf der Tafel stellt eine Brenncurve des speciellen Falles dar.

Auch den Einfallswinkel e_2 brauchen wir nicht numerisch zu berechnen; es lässt sich nämlich zeigen,

„dass er dem Winkel ψ gleich ist, welchen die Normale mit der grossen Achse bildet.“ In der That, wir haben

$$\sin \psi = \frac{r \,.\, \sin \vartheta}{N} = \sin (\vartheta - e_1)$$

da $N = \frac{r \,.\, \sin \vartheta}{\sin (\vartheta - e_1)}$ war (vergl. Seite 9); folglich auch

$$\cos \psi = \cos (\vartheta - e_1);$$

entwickelt man die rechte Seite und setzt für $\cos e_1$ und $\sin e_1$ die auf Seite 12 stehenden Werte, so ergiebt sich:

$$\cos \psi = \frac{\cos \vartheta + \varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\,\varepsilon \cos \vartheta}} = \cos e_2,$$

denn aus Formel (9) ergiebt sich für $n = \frac{1}{\varepsilon}$ genau derselbe Ausdruck für $\cos e_2$.

Infolge der Gleichheit dieser Winkel muss nun die Hälfte aller Strahlenbündel, welche homocentrisch gebrochen werden, parallel der grossen Achse eintreten; es sind dies die Strahlenbündel erster Art auf dem zweiten und dritten Ellipsenquadranten und die Strahlenbündel zweiter Art, die im ersten und vierten Quadranten auffallen. Für eben diese Strahlenbündel waren aber die Brennpunktscurven auf die Brennpunkte I und II der Ellipse zusammengeschrumpft, so dass aus unseren Betrachtungen als ein partielles Resultat der Satz herausfällt, den schon Cartesius aufstellte:

Jedes, auch endlich dicke, Bündel von parallelen Strahlen, welches parallel der Achse auf ein Rotationsellipsoid fällt, wird homocentrisch nach dem entfernteren Brennpunkt des Ellipsoids gebrochen, wenn der Brechungsindex der reciproke Wert der numerischen Excentricität ist.

Die Lage der übrigen, unendlich dünnen Strahlenbündel, welche ausser den eben hervorgehobenen noch homocentrisch gebrochen werden, ist durch die einfache Beziehung zwischen den Winkeln e_2 und ψ auch be-

stimmt; die Oerter ihrer Brennpunkte sind analytisch und geometrisch angegeben. —

Uebertragen wir die Resultate auf den Raum, indem wir die Figuren 1—5 auf der Tafel um die grosse Achse der Ellipse rotiren lassen, so erkennen wir, dass für das Rotationsellipsoid zwei grosse allgemeine Kategorieen und eine specielle von Brennflächen existiren, und dass die Kriterien dieser Kategorieen bez. $n \cdot \varepsilon \lessgtr 1$ sind. — Die Flächen der ersten Kategorie sind continuirlich und umschliessen sowohl das Centrum als auch beide Brennpunkte des Ellipsoids allseitig. (Fig. 1 und 2). Die Flächen der zweiten Kategorie hingegen sind discontinuirlich; sie umfassen das Centrum und die Brennpunkte garnicht (Fig. 5), oder doch nicht allseitig; im Innern einer Schale einer solchen Brennfläche kann höchstens das Centrum und ein Brennpunkt der Ellipse liegen, niemals beide Brennpunkte. (Fig. 4). Diese beiden Kategorieen gehen in einander über durch die dritte, specielle, deren Flächen das Centrum allseitig umschliessen, durch die Brennpunkte aber hindurch gehen und sie als singuläre Punkte enthalten. (Fig. 3).

[Die Figuren 2 und 4 der Tafel sollen dazu dienen, dem Auge die Verwandtschaft der drei Kategorieen und ihren Uebergang in einander deutlich zu machen. Sie stellen die Brenncurven dar für zwei Ellipsen von den Constanten:

$p = 8,\ \varepsilon = 0{,}7,\ n = 1{,}4$ (Fig. 2)

und $p = 8,\ \varepsilon = 0{,}7,\ n = 1{,}5$ (Fig. 4)

wo mithin n nur wenig kleiner resp. grösser ist als $\frac{1}{\varepsilon}$.]

§ 7.

Die Brennfläche für das Rotationshyperboloid.

Die Gleichung der Hyperbel als Meridiancurve, bezogen auf den I. Brennpunkt und die reelle Achse, ist:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos \vartheta}$$

worin $\varepsilon > 1$ ist. ϑ wird wieder von der Nulllage IS aus im Sinne der Drehung des Uhrzeigers variirt, der I. Brennpunkt ist aber der rechts gelegene. — Wir behaupten:

„Die Gleichung (11) stellt für die Hyperbel den ersten Zweig der Brenncurve — den Ort der Brennpunkte der Bündel erster Art — dar, wenn wir berücksichtigen, dass $\varepsilon > 1$ ist."

Gleichung (11) entstand, indem wir die Differenz $r - \varphi$ bildeten. Nun sahen wir Seite 11 unter (e), dass die Strahlenbündel erster Art, welche auf den linken Hyperbelzweig fallen, nach der Brechung vom I. Brennpunkt her divergiren; es scheint hier also insofern eine Aenderung nötig, als der Radius vector r_1 der Brenncurve der Summe aus r und φ gleich sein muss, sobald der Incidenzpunkt auf dem linken Hyperbelast liegt. Die Punkte dieses linken Astes ergeben sich, wenn in der Hyperbelgleichung $\cos\vartheta$ Werte zwischen $-\frac{1}{\varepsilon}$ und -1 annimmt; für solche Werte wird aber r negativ, so dass die algebraische Differenz $r - \varphi$ von selbst eine Summe wird. Es darf demnach Gleichung (11) für den ersten Zweig der Brenncurve beibehalten werden; doch wollen wir darauf aufmerksam machen, dass Gleichung (11^1) nicht mehr mit (11) identisch ist, eben wegen des besprochenen Zeichenwechsels von r.

Ebenso stellt die Gleichung (12) den zweiten Zweig der Brenncurve dar, wenn wir als Hyperbelgleichung in Bezug auf den II. (linken) Brennpunkt

$$r^1 = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \vartheta^1}$$

zu Grunde legen und darin ϑ^1 von der Lage IIS aus gegen den Sinn der Drehung des Uhrzeigers wachsen lassen.

Die Symmetriegesetze (f) und (g) behalten ihre Gültigkeit, weil die Hyperbel auch in Bezug auf ihre Achsen symmetrisch ist, wie die Ellipse.

Nun ist aber hier sicher $n > \frac{1}{\varepsilon}$, weil wir von vornherein $n > 1$ vorausgesetzt haben. Die Brenncurve ist also discontinuirlich, zwischen zwei bestimmten Werten von $\cos\vartheta$ — den Wurzeln der Gleichung $R(\cos\vartheta) = 0$ — giebt es kein reelles r_1.

Maxima und Minima besitzt die Curve ebenfalls nicht weiter, als bei $\vartheta = \pi$ und $\vartheta = 0$.

Als Beispiel zur graphischen Darstellung einer solchen Brenncurve sind die Constanten gewählt:

$$p = 8,\ \varepsilon = 1{,}5,\ n = 1{,}4;$$

man hat r_1 (und e_2) zu berechnen für Incidenzpunkte im ersten Hyperbelquadranten aus der Formel:

$$-r_1 = \frac{8}{0{,}96\,(1 + 1{,}5\cos\vartheta)} \left\{ 1 + 2{,}94\cos\vartheta + \right.$$
$$\left. + 1{,}4\sqrt{-1{,}16 + 3\cos\vartheta + 4{,}41\cos^2\vartheta} \right\}$$

Tabelle III.

ϑ	e_2	$-r_1$
0°	0°	24,80
25° 50′	22° 2′	24,16
36° 52′	32° 2′	23,38
60°	54° 22′	19,77
70° 31′,7	73° 49′	15,47
74° 1′	90°	10,65

Wie die Brenncurve nach dieser Tabelle mit Hülfe der Sätze (b), (e), (f) und (g) construirt werden kann, brauchen wir nicht zu wiederholen, nachdem die ähnliche Construction für die Ellipse beschrieben ist. Die Brenncurve ist in Fig. 7 der Tafel gezeichnet. —

Das Hyperboloid besitzt nur eine Kategorie von Brennflächen, welche discontinuirlich sind, das Centrum nie, die Brennpunkte ebenfalls nicht oder doch nicht vollständig umschliessen. —

§ 8.

Die Brennfläche für das Rotationsparaboloid.

Als Gleichung der Meridiancurve haben wir

$$r = \frac{p}{1 + \cos \vartheta}$$

anzusehen, müssen demnach für den Ort der Brennpunkte der Strahlenbündel erster Art wieder Gleichung (11¹) erhalten, in welcher $\varepsilon = 1$ gesetzt ist; sie hat dann hier die Form:

$$r_1 = \frac{-p}{(n^2-1)(1+\cos\vartheta)} \cdot \left\{ 1 + n^2 \cos\vartheta + \right.$$
$$\left. + n \sqrt{(1+\cos\vartheta)(2 - n^2[1-\cos\vartheta])} \right\}$$

Einen Zeichenwechsel vor der Quadratwurzel brauchen wir nicht vorzunehmen, weil der zweite und dritte Quadrant der Parabel, für welche das negative Zeichen einzutreten hätte, im Unendlichen liegen.

Der Ort der Brennpunkte der Strahlenbündel zweiter Art entzieht sich zunächst der analytischen Darstellung in der bisher angewandten Weise, weil der II. Brennpunkt ins Unendliche gerückt ist. Da wir aber die Brennweite der Bündel zweiter Art für jeden Punkt kennen und ihre Richtung nach der Brechung durch den Satz (d) bestimmt haben, so können wir den Ort ihrer Brennpunkte auch construiren. Die Möglichkeit der Construction giebt dann eine neue Art der analytischen Darstellung an die Hand; ist nämlich r_1^1 jetzt der Abstand eines Punktes H^1 des zweiten Brenncurvenzweiges vom I. Brennpunkt, so besteht zwischen dem Radius vector des Incidenzpunktes r, der Brennstrecke φ und jener Strecke r_1^1 die bekannte Relation:

$$r_1^1 = \sqrt{r^2 + \varphi^2 - 2\, r\, \varphi \,.\, \cos\vartheta},$$

wie man sich aus der Figur 6 leicht überzeugt. Durch Einsetzen der Werte von r und φ entsteht die Gleichung des zweiten Brenncurvenzweiges, bezogen auf den I. Brennpunkt der Parabel.

Die Symmetriegesetze (f) und (g) müssen sich dadurch modificiren, dass die Parabel nur eine Symmetrieachse besitzt; sie werden lauten:

h) Die 4 Brennweiten der 2 Strahlenbündel erster Art und der 2 Strahlenbündel zweiter Art, welche in zwei symmetrisch zur Achse gelegenen Punkten auf die Parabel fallen, sind gleich und der Richtung nach symmetrisch in Bezug auf die Achse.

i) Die Achse der Parabel ist Symmetrielinie für die Hälften der Brenncurvenzweige.

Wie bei der Hyperbel, so stellt sich auch hier heraus, dass die Brenncurve discontinuirlich ist, denn es ist sicher $n > 1$. Die beiden Wurzeln der Gleichung $R(\cos\vartheta) = 0$ sind:

$$\cos\vartheta_1 = \frac{n^2 - 2}{n^2} \quad \text{und} \quad \cos\vartheta_2 = -1,$$

also $\vartheta_1 \gtreqless 90^0$, je nachdem $n \lesseqgtr \sqrt{2}$ ist, und $\vartheta_2 = 180^0$; unter allen Winkeln von ϑ_1 bis 180^0 trifft man auf keinen Punkt der Brenncurve, für $\vartheta = 180^0$ indessen findet man den unendlich fernen Punkt als zu ihr gehörig. In diesem erreicht auch r_1 sein Maximum, während das endliche Minimum bei $\vartheta = 0$ angenommen wird.

Als Beispiel ist gewählt:

$$p = 7, \; n = 1{,}338$$

dann wird

$$r_1 = \frac{-7}{0{,}7903\,(1 + \cos\vartheta)} \cdot \left\{ 1 + 1{,}7903\cos\vartheta + \right.$$

$$\left. + 1{,}338\sqrt{(1 + \cos\vartheta)\,(2 - 1{,}7903\,[1 - \cos\vartheta])} \right\}.$$

Tabelle IV.

ϑ	e_2	$-r_1$
0^0	0^0	24,20
10^0	$6^0\ 45'$	24,15
30^0	$20^0\ 16'$	23,67
65^0	$45^0\ 59'$	20,70
$82^0\ 47'$	$62^0\ 15'$	16,99
90^0	$75^0\ 6'$	14,28
$96^0\ 43'$	90^0	7,93

Die Construction ist mit Hülfe der Sätze (b), (d), (h) und (i) ausgeführt in Fig. 6 der Tafel.

Beim Paraboloid tritt wieder nur die discontinuirliche Kategorie von Brennflächen auf; die eine Hälfte der Brennfläche liegt aber nur im Endlichen, die andere liegt ganz im Unendlichen.

§ 9.

Schlussbetrachtung über die Resultate.

Bei einer vergleichenden Betrachtung der Figuren 4, 5, 6 und 7 zeigt sich klar, wie die Brennflächen der Ellipsoide durch die des Paraboloids in die der Hyperboloide übergehen. Je weiter sich nämlich der II. Brennpunkt des Ellipsoids vom I. entfernt, desto mehr rücken auch die Schalen der Brennflächen auseinander, bis im Grenzfall die rechten mit dem II. Brennpunkt im Unendlichen verschwinden. (Fig. 6). Kehrt dann der II. Brennpunkt aus dem Unendlichen auf der linken Seite zurück, so treten auch die verschwundenen Teile der Brennfläche auf der linken Seite wieder auf. Die Schalen kehren sich nun ihre Oeffnungen zu (Fig. 7), während vorher bei den Ellipsoiden ihre Oeffnungen von einander abgewendet waren. —

Nachdem das Problem: den Ort der Brennpunkte der homocentrisch gebrochenen Strahlenbündel zu finden, somit in dem ersten der vier oben (Seite 5) unterschiedenen Fälle gelöst ist, fassen wir die Resultate unserer Untersuchungen unter einem allgemeinen Gesichtspunkte kurz zusammen.

Wenn $n > 1$ ist, so ist für die drei Rotationsflächen I. Ordnung: „oblonges Ellipsoid, Paraboloid, zweischaliges Hyperboloid“ im Allgemeinen die Ungleichung $n \cdot \varepsilon > 1$ erfüllt. Nur für eine Menge von Ellipsoiden kann auch $n \cdot \varepsilon \leqq 1$ sein. Homocentrische Brechung dünner cylindrischer Strahlenbündel, welche in die

Flächen eintreten, findet daher nur ganz allgemein in *endlichen* Stücken dieser Flächen statt, in den Calotten nämlich, welche die Scheitel an den Enden der Rotationsachse zu Mittelpunkten haben; in einer äquatorialen Zone der Flächen ist homocentrische Brechung unmöglich. Die beiden Calotten breiten sich um so weiter gegen den Aequator hin aus, je mehr das Produkt $n \cdot \varepsilon$ sich der Einheit nähert; sie behalten aber immer eine endliche Ausdehnung, denn sie erreichen den Aequator nur, wenn $n \cdot \varepsilon \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} 1$ wird, wenn die brechende Fläche ein Ellipsoid ist, dessen Excentricität eine gewisse Grenze nicht übersteigt; in diesem Falle findet die homocentrische Brechung in der ganzen Fläche statt. — Entsprechend sind nun auch die Brennflächen stets von endlicher Ausdehnung, im Allgemeinen discontinuirlich, wenn aber $n \cdot \varepsilon \begin{matrix} < \\ = \end{matrix} 1$ ist, continuirlich.

Genau wie der erste können die übrigen drei Fälle auf Seite 5 untersucht werden, denn wie gezeigt stellt die Differenz $r - \varphi$ in allen Fällen den Radius vector der Brenncurve dar, wenn man nur die Richtung von r und φ berücksichtigt. Wir sehen hier von einer Ausführung ab, die wesentlich Neues nicht bieten würde und wollen nur die Resultate für den zweiten Fall in allgemeiner Form den soeben angegebenen des ersten Falles gegenüber stellen.

Wenn $n < 1$ ist, so können wir $n \cdot \varepsilon < 1$ als die allgemeine, für die drei Rotationsflächen II. Ordnung bestehende Ungleichung ansehen; für Hyperboloide kann allerdings auch $n \cdot \varepsilon \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} 1$ sein. Die homocentrische Brechung cylindrischer Bündel, welche aus den Flächen austreten, geschieht deshalb allgemein in allen Punkten der Flächen; nur bei denjenigen Hyperboloiden, deren Excentricität eine gewisse Grenze übersteigt, findet die homocentrische Brechung in den endlichen Calotten statt.

— Die Brennflächen sind hier deshalb im Allgemeinen continuirlich, umschliessen die Flächen oder gehen mit ihnen ins Unendliche; nur wenn $n \cdot \varepsilon > 1$ ist, sind sie discontinuirlich und endlich. — Bei der Untersuchung des Specialfalles $n \cdot \varepsilon = 1$ wird auch hier wieder ein Satz gefunden, den schon Cartesius anführt, „*dass nämlich das Hyperboloid alle Strahlen, welche von innen her parallel der Achse auf eine seiner Schalen fallen, im Brennpunkt der andern Schale vereinigt, sobald der Brechungsinder dem reciproken Wert der numerischen Excentricität gleich ist.*“

Erklärung zu den Figuren.

In den Figuren sind die Strahlenbündel nach der Brechung durch ihren Hauptstrahl angedeutet für Punkte des ersten Quadranten der Kegelschnitte; in den übrigen Quadranten ist ihre Darstellung unterlassen, weil die Uebersichtlichkeit der Figuren dadurch gelitten hätte; aus demselben Grunde sind auch die einfallenden Strahlenbündel nicht gezeichnet. In den Fig. 4—7 sind diejenigen Teile der Kegelschnitte, in welchen homocentrische Brechung stattfindet, durch stärkere Zeichnung hervorgehoben. Die Hauptstrahlen der Bündel erster und zweiter Art sowie die zu ihnen gehörigen Brenncurvenzweige sind von einander unterschieden durch die verschieden gezeichneten Linien — — — — — und —.—.—.—.—. Constructionsstrahlen sind voll ausgezogen.

Fig. 1.

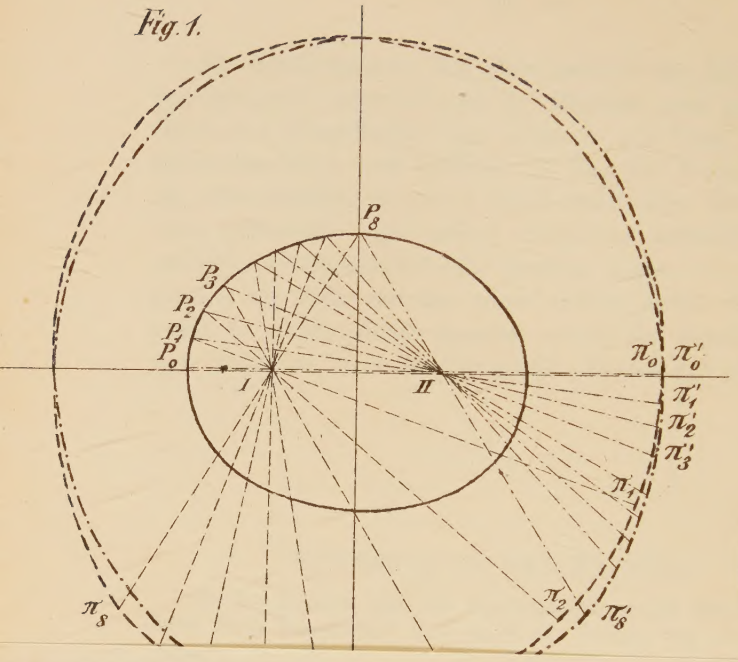
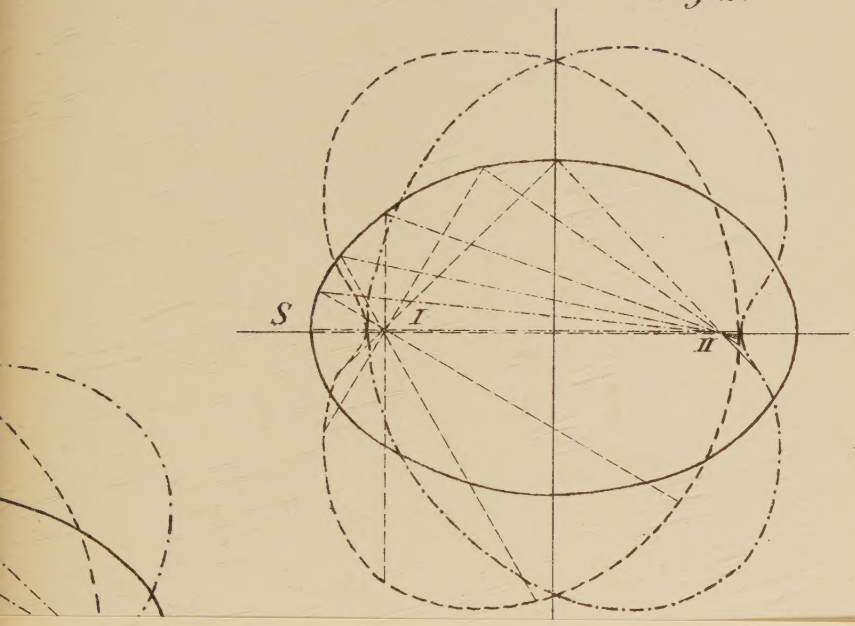



Fig. 2.